有界変分汎関数の劣微分作用素を含む放物型発展方程式の安定性 (非線形発展方程式とその応用)

白川, 健; 剣持, 信幸

数理解析研究所講究録
1135 巻 2000 年 91-109

有界変分汎関数の劣微分作用素を含む放物型発展方程式の安定性

千葉大・自然　白川　健 (Ken SHIRAKAWA)
千葉大・教育　劒持　信幸 (Nobuyuki KENMOCHI)

序論

本論文では次の放物型発展方程式について考える.

$$v'(t)+\kappa\partial V(v(t))\ni v(t)+\theta_0 \text{ in } L^2(0,L),\ t\geq 0, \tag{0.1}$$

ここに, $0<L<+\infty$, κ は（十分小さい）正数, θ_0 は与えられた定数, ∂V は $|z|\leq 1$ a.e. on $[0,L]$ を満たす任意の関数 z の全変分を対応させる関数 V の $L^2(0,L)$ での劣微分作用素である.

この問題の背景にある物理現象は、Visintin（[8] 参照）によって提唱された中間的尺度 (mesoscopic length scale) での 1 次元液体・固体相転移問題:

$$\begin{cases} (\theta+v)_t-\theta_{xx}=0 \text{ in } Q:=(0,+\infty)\times(0,L), \\ v_t+\kappa\partial V(v(t))\ni v(t)+\theta(t) \text{ in } L^2(0,L),\ t>0, \\ \text{(B. C.)} + \text{(I. C.)}, \end{cases}$$

で, θ は（相対）温度を表す関数で, v は物質の状態を（液体か固体かを）表す相関数とされる.

今仮に, $p\geq 2$ として,

$$V(z):=\begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^L |z_x|^p\,dx, \text{ if } z\in W^{1,p}(0,L),\ |z|\leq 1 \text{ on } (0,L) \\ \qquad\qquad\qquad \text{and } z_x(0)=z_x(L)=0, \\ +\infty \text{ otherwise}, \end{cases}$$

であれば, 方程式 (0.1) は通常の Allen-Cahn モデル

$$\begin{cases} v_t-\kappa(|v_x|^{p-2}v_x)_x+\xi-v=\theta_0 \text{ in } Q, \\ \xi\in\partial I_{[-1,1]}(v) \text{ in } Q, \\ v_x(t,0)=v_x(t,L)=0 \text{ for } t>0, \\ v(0,\cdot)=v_0 \text{ in } L^2(0,L) \end{cases}$$

になる．このモデルに関しては $p=2$ の場合は Chen-Elliott（[1] 参照），$p>2$ の場合は Ito（[3] 参照）によって研究されている。

(0.1) の定常問題

$$\kappa\partial V(w) \ni w+\theta_0 \text{ in } L^2(0,L) \tag{0.2}$$

の解については論文 [7] の中で詳しく研究され, (0.2) の解は高々有限個の不連続点を持つような階段関数（図 1 参照）であることがわかっている．また, (0.2) は次の汎関数（自由エネルギー）

$$F_{\theta_0}(z) := \kappa V(z) - \int_0^L |z+\theta_0|^2\,dx,\ z\in L^2(0,L)$$

の Euler-Lagrange 方程式であるが, 論文 [7] では更に F_{θ_0} の極小元はすべて高々有限個の点を除いて 1 または -1 を値に持つ階段関数（図 2 参照）であることも示された．

本論文の最大の目標は, 有界閉区間 $[0,L]$ 内の液体領域 $\{w=1\}$, 固体領域 $\{w=-1\}$, そしてみぞれの領域 $\{-1<w<1\}$ の時間的変化を研究することで, 今回は特にそれぞれの領域の安定性について調べたい．そのために先ず $[0,L]$ 内の相対開区間 J と定数 $c\in[-1,1]$ の組 (J,c) に対する安定性の概念を導入する．この様な部分的な安定性の捉え方は従来の常微分方程式の意味での安定性とは大きく異なるものであるが, 空間的な広がりを考慮するという意味で偏微分方程式ならではの安定性の概念ということが出来る．ここでは, 部分的な安定性の概念と先に得られた定常解の構造定理を用いて次の 3 つの事柄について議論する．

(a) (J,c) が安定（不安定）であるための必要十分条件;
(b) (0.2) の解の安定性;
(c) 安定定常解の周辺から出発する (0.1) の解の漸近挙動.

1 既に知られた事実の紹介

本論文を通して, L は正数, 各 $p\in[1,+\infty]$ に対して, $|\cdot|_{L^p(0,L)}$ は $L^p(0,L)$ のノルム, $(\cdot,\cdot)$ は通常の $L^2(0,L)$ の内積とする．また、任意の $L^2(0,L)$ で定義された適性下半連続凸関数 φ に対し, $D(\varphi)$, $\partial\varphi$, $D(\partial\varphi)$ をそれぞれ, φ の有効領域, φ の（$L^2(0,L)$ での）劣微分, $\partial\varphi$ の有効領域とする．

任意の 2 つの関数 $f_i\in L^1(0,L)$, $i=1,2$, に対し

$$(f_1\vee f_2)(x) := \max\{f_1(x),f_2(x)\},\ (f_1\wedge f_2)(x) := \min\{f_1(x),f_2(x)\},\ \text{a.e. } x\in(0,L)$$

と定める．特に, $f^+ := f\vee 0$ とする．また, 任意の区間 $J\subset\mathbb{R}$ に対し, $|J|$ は J の長さとする．

V_0 は任意の $z\in L^1(0,L)$ に対し, その全変分

$$V_0(z) := \sup\left\{ \int_0^L z\psi_x\,dx \;\middle|\; \begin{array}{l} \psi\in C^1(0,L),\ |\psi|\le 1 \text{ on } (0,L), \\ \psi \text{ の台は (0, L) 内でコンパクト} \end{array} \right\}$$

を対応させる汎関数とし, 全変分が有限な関数（有界変分関数）全体の空間を $BV[0,L]$ と書く, 即ち

$$BV[0,L] := \left\{ z \in L^1(0,L) \,\middle|\, V_0(z) < +\infty \right\}.$$

[2, Chapter 5] から, V_0 は $D(V_0) = BV[0,L]$ となる様な $L^1(0,L)$ 上の適性下半連続凸関数となる.

ここで, $L^2(0,L)$ 上の汎関数 V を次で定義する.

$$V(z) := \begin{cases} V_0(z), \text{ if } z \in L^2(0,L), |z| \le 1 \text{ a.e. on } (0,L), \\ \\ +\infty, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

このとき, 明らかに V は $L^2(0,L)$ 上の適性下半連続凸関数である. 先に導入した全変分 V_0 は正確には本質的全変分 (essential variation) と呼ばれており, 通常の全変分

$$V_1(z) := \sup_{\Delta \in \mathscr{D}} \sum_{k=1}^{n_\Delta} |z(x_k) - z(x_{k-1})|, \ \forall z : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R},$$

ただし,

$$\mathscr{D} := \left\{ \Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n_\Delta} = L\}, \ n_\Delta \in \mathbb{N} \right\},$$

とは異なる値が対応する場合がある. しかしながら [2, Chapter 5] の事実から, 任意の $v \in BV[0,L]$ に対し,

$$\tilde{v} = v \text{ a.e. on } [0,L], \, V_1(\tilde{v}) = V_0(v) \tag{1.1}$$

を満たす様な関数 $\tilde{v} : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する事が確認される. 又, $\tilde{v}$ は $x = 0$, $x = L$ で連続で,

$$(\tilde{v}(x+) - \tilde{v}(x))(\tilde{v}(x-) - \tilde{v}(x)) \le 0, \ \forall x \in (0,L) \tag{1.2}$$

を満たす. ここに,

$$\tilde{v}(x+) := \lim_{y \searrow x} \tilde{v}(y), \ \tilde{v}(x-) := \lim_{y \nearrow x} \tilde{v}(y).$$

更に, 各 $v \in BV[0,L]$ に対して $\tilde{v}$ の値は $[0,L]$ 内の高々可算個の点を除いては一意的に定まる事も示される. よって, 本論文では $D(V)$ 内の関数として (1.1), (1.2) を満たす様な関数 $\tilde{v} : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ を用いる.

今, 与えられた（十分小さい）正数 κ と

$$S_\theta := \sup_{t \ge 0} |\theta|_{L^2(t,t+1;L^2(0,L))} < +\infty$$

を満たす様な関数 $\theta \in L^2_{loc}([0,+\infty); L^2(0,L))$ に対して発展方程式

$$(P)_\theta \quad v'(t) + \kappa \partial V(v(t)) \ni v(t) + \theta(t) \text{ in } L^2(0,L), \, t \ge 0,$$

where $v' = \frac{dv}{dt}$, を考えよう.

関数 $v : [0,+\infty) \longrightarrow L^2(0,L)$ が次の 2 つの条件を満たす時, v を $(P)_{\theta_0}$ の解という.

(S1) $v \in C([0,+\infty); L^2(0,L)) \cap W^{1,2}_{loc}((0,+\infty); L^2(0,L)),\ V(v) \in L^1_{loc}([0,+\infty))$;
(S2) $\kappa\partial V(v(t)) \ni v(t) + \theta(t) - v'(t)$ in $L^2(0,L)$ for a.e. $t \in (0,+\infty)$.

また, 論文 [4] の結果から, 任意の $v_0 \in \overline{D(V)}$ に対し, 初期条件 $v(0) = v_0$ を満たす $(P)_\theta$ の初期値問題の解 v は一意的に存在し, 更に解 v は次の意味で有界である事も分かっている. 即ち, $|v_0|_{L^2(0,L)}$ と S_θ に依存する正定数 $K_0 = K_0(|v_0|_{L^2(0,L)}, S_\theta)$ が存在し, 次の不等式が成立する.

$$\sup_{t\ge 0} |v(t)|^2_{L^2(0,L)} + \sup_{t\ge 0} \int_t^{t+1} \kappa V(v(t))\, d\tau + \sup_{t\ge 1} \int_t^{t+1} |v'(\tau)|^2_{L^2(0,L)}\, d\tau + \sup_{t\ge 1} \kappa V(v(t)) \le K_0$$

次に, 劣微分作用素 ∂V に対するいわゆる T-単調性（T-monotonicity）を証明する.

命題 1.1

$$(z_1^* - z_2^*, (z_1 - z_2)^+) \ge 0,\ \forall z_i \in D(\partial V),\ \forall z_i^* \in \partial V(z_i),\ i = 1,2. \tag{1.3}$$

証明 (1.3) と同値な不等式（[6] 参照）

$$V(z_1 \vee z_2) + V(z_1 \wedge z_2) \le V(z_1) + V(z_2),\ \forall z_i \in D(V),\ i = 1,2 \tag{1.4}$$

を示そう. $z_i \in D(V), i = 1,2$ とすると, [2, Chapter 5] から, 各 $i = 1,2$ に対して, 滑らかな関数の列 $\{z_i^{(j)}\} \subset C^\infty[0,L] \cap D(V)$ を

$$z_i^{(j)} \to z_i \text{ in } L^2(0,L),\ V(z_i^{(j)}) \to V(z_i) \text{ as } j \to +\infty,$$

となるように選ぶ事が出来る. この時, 各 $j = 1,2,3,\cdots$ に対し, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&V(z_1^{(j)} \vee z_1^{(j)}) + V(z_1^{(j)} \wedge z_2^{(j)})\\
=\ &\int_0^L |(z_1^{(j)}) \vee z_2^{(j)})_x(x)|\, dx + \int_0^L |(z_1^{(j)} \wedge z_2^{(j)})_x(x)|\, dx\\
=\ &\int_0^L |(z_1^{(j)})_x(x)|\, dx + \int_0^L |(z_2^{(j)})_x(x)|\, dx = V(z_1^{(j)}) + V(z_2^{(j)}).
\end{aligned}$$

V は $L^2(0,L)$ で下半連続であるので, $j \to +\infty$ とすれば直ちに (1.4) が得られる. ■

系 1.1 （比較定理）任意の $0 \le s < +\infty,\ 0 < T \le +\infty$ に対し

$$J_{s,T} := \begin{cases} [s, s+T], & \textit{if } T < +\infty, \\ [s, +\infty), & \textit{if } T = +\infty, \end{cases}$$

$\theta_i \in L^2_{loc}(J_{s,T}; L^2(0,L))$, $(i = 1,2)$ は与えられた関数で,

$$\theta_1(t,x) \le \theta_2(t,x),\ a.e.\ (t,x) \in J_{s,T} \times (0,L)$$

を満たすとする. 今, 各 $i=1,2$ に対し, $v_i \in C(J_{s,T}; L^2(0,L))$ は $(P)_{\theta_i}$ の解で,

$$v_1(s,x) \le v_2(s,x), \ \ a.e. \ x \in [0,L]$$

を満たすならば, 次が成立する.

$$v_1(t,x) \le v_2(t,x) \ \forall t \in J_{s,T}, \ \ a.e. \ x \in [0,L].$$

証明 $(P)_{\theta_1}$ と $(P)_{\theta_2}$ の両辺を辺々引き算し, 更に $(v_1(t)-v_2(t))^+$ によって内積を施すと

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|(v_1(t)-v_2(t))^+|^2_{L^2(0,L)} + (v_1^*(t)-v_2^*(t),(v_1(t)-v_2(t))^+)$$
$$|(v_1(t)-v_2(t))^+|^2_{L^2(0,L)} + (\theta_1(t)-\theta_2(t),(v_1(t)-v_2(t))^+), \ \text{a.e.} \ t \in J_{s,T}$$

となる. ここで仮定と命題 1.1 を用いると, 次の不等式を得る.

$$\frac{d}{dt}|(v_1(t)-v_2(t))^+|^2_{L^2(0,L)} \le 2|(v_1(t)-v_2(t))^+|^2_{L^2(0,L)}, \ \text{a.e.} \ t \in J_{s,T}.$$

Gronwall の補題により

$$|(v_1(t)-v_2(t))^+|^2_{L^2(0,L)} \le e^{2(t-s)}|(v_1(s)-v_2(s))^+|^2_{L^2(0,L)} = 0, \forall t \in J_{s,T}$$

となるが, これは系の主張が正しい事を示唆している. ■

次に関数 θ が与えられた定数 θ_0 である場合での, 方程式 $(P)_\theta$ （$(P)_{\theta_0}$ と書く）の解の漸近挙動に関して, 既に知られた結果を紹介する.

定義 1.1 （ω-極限集合）$(P)_{\theta_0}$ の任意の解 v に対し,

$$\omega(v) := \left\{ v_\infty \in L^2(0,L) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\{t_i\} \subset [0,+\infty) \text{ s.t. } t_i \nearrow +\infty, \\ v(t_i) \to v_\infty \text{ in } L^2(0,L) \text{ as } i \to +\infty \end{array} \right\}$$

を v の ω-極限集合 (ω-limit set) と呼び, 各 $v_\infty \in \omega(v)$ は v の ω-極限点 (ω-limit point) と呼ばれる.

命題 1.2 （*[5, section 9]* 参照）$(P)_{\theta_0}$ の任意の解 v に対し, 次の *(i), (ii), (iii)* が成立する.

(i) v の ω-極限集合 $\omega(v)$ は空でなく, $L^2(0,L)$ の位相で連結で, コンパクトである;

(ii) v の ω-極限点 $v_\infty \in \omega(v)$ はすべて次の定常問題

$$\kappa\partial V(w) \ni w + \theta_0 \ \ in \ L^2(0,L)$$

の解である;

(iii) $v_\infty, w_\infty \in \omega(v)$ ならば

$$F_{\theta_0}(v_\infty) = F_{\theta_0}(w_\infty), \ \ F_{\theta_0}(v(t)) \searrow F_{\theta_0}(v_\infty) \ \ as \ t \to +\infty.$$

2 $(P)_{\theta_0}$ の定常問題

本論文を通して θ_0 は与えられた定数とする. この節では方程式 $(P)_{\theta_0}$ の定常問題

$$(P_\infty)_{\theta_0} \quad \kappa\partial V(w) \ni w + \theta_0 \text{ in } L^2(0,L)$$

について, 論文 [7] で得られた解の構造定理を紹介する. $|\theta_0| \geq 1$ である場合は定常解のクラスは極めて単純明快であるのでここでは割愛して, $|\theta_0| < 1$ の場合のみを扱う.

定義 2.1 各 $-1 < \theta_0 < 1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, $BV[0,L]$ の部分集合 $S_n(\theta_0)$ を次で定義する.

(I) $S_0(\theta_0) := \{-1, -\theta_0, 1\}$.

(II) (図 1 参照) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $S_n(\theta_0)$ は以下を満足するような有界変分関数 z 全体の集合である.

$$z(x) := \begin{cases} c_k, \text{ if } x \in J_k, \ k = 0, 1, \cdots, n, \\ -\theta_0, \text{ if } x \in [x_k^L, x_k^R], \ k = 1, \cdots, n, \end{cases}$$

ここに,

(i) $0 < x_1^L \leq x_1^R < \cdots < x_k^L \leq x_k^R < \cdots < x_n^L \leq x_n^R < L$,

$$J_k := \begin{cases} [0, x_1^L) \text{ for } k = 0, \\ (x_k^R, x_{k+1}^L) \text{ for } k = 1, \cdots, n-1, \\ (x_n^R, L] \text{ for } k = n; \end{cases}$$

(ii) $c_k \in [-1, 1] \setminus \{-\theta_0\}$, $k = 0, 1, \cdots, n$,

$$(c_{k-1} + \theta_0)(c_k + \theta_0) < 0, \ k = 1, \cdots, n;$$

(iii) • $k \in \{0, n\}$ ならば

$$|c_k + \theta_0||J_k| \geq \kappa \text{ 及び } c_k \in \left\{1, -1, \frac{\kappa}{|J_k|} - \theta_0, -\frac{\kappa}{|J_k|} - \theta_0\right\};$$

• $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ $(n \geq 2)$ ならば

$$|c_k + \theta_0||J_k| \geq 2\kappa \text{ 及び } c_k \in \left\{1, -1, \frac{2\kappa}{|J_k|} - \theta_0, -\frac{2\kappa}{|J_k|} - \theta_0\right\}.$$

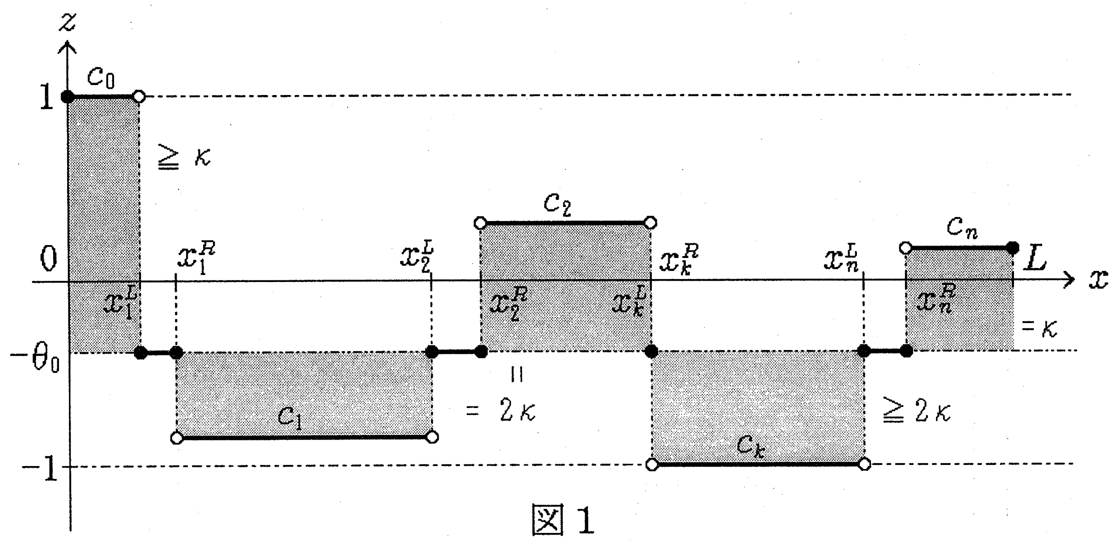

図 1

ここで, $N_{\theta_0} := \sup\{n \mid S_n(\theta_0) \neq \emptyset\}$ とおくと定義 2.1, (II) の条件 (iii) から

$$1 \leq N_{\theta_0} \leq \frac{L}{2\kappa}(1 + |\theta_0|) < +\infty,$$

即ち N_{θ_0} は有限で, 更に κ を

$$0 < \kappa < \frac{L}{2}(1 + |\theta_0|) \tag{2.1}$$

となるように取れば, $1 < N_{\theta_0} < +\infty$ となる. よって本論文を通して κ は (2.1) の意味で十分小さい正数とする.

今, $BV[0,L]$ の部分集合 $S(\theta_0)$ を次で定義する.

$$S(\theta_0) := \sum_{n=0}^{N_{\theta_0}} S_n(\theta_0).$$

定理 2.1 ([7] 参照) $|\theta_0| < 1$ とする. このとき関数 $w \in L^2(0,L)$ が $(P_\infty)_{\theta_0}$ の解であるための必要十分条件は, 次の条件を満足するような関数 $w^\circ \in S(\theta_0)$ が存在することである.

$$x \in [0,L] \text{ が } w^\circ \text{ の連続点ならば } w(x) = w^\circ(x). \tag{2.2}$$

次に, $L^2(0,L)$ 上で定義された汎関数

$$F_{\theta_0}(z) := \begin{cases} \kappa V(z) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L |z+\theta_0|^2\, dx, & \text{if } z \in D(V), \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

を考える．方程式 $(P_\infty)_{\theta_0}$ は F_{θ_0} の Euler-Lagrange 方程式である．また，$S(\theta_0)$ の部分集合 $M_{loc}(\theta_0)$ を次で定義する（図 2 参照）．

$$M_{loc}(\theta_0) := \begin{cases} \{1,-1\}, \text{ if } \theta_0 \neq 0, \\ \left\{ z \in S(0) \;\middle|\; \begin{array}{l} z \text{ の連続点 } x \text{ において } |z(x)| = 1 \text{ で,} \\ z \in S_n(\theta_0)\ (1 \leq n \leq N_{\theta_0}) \text{ ならば} \\ x_k^L = x_k^R\ (k = 1, \cdots, n), \\ |J_0|, |J_n| > \kappa,\ |J_k| > 2\kappa\ (k = 1, \cdots, n-1), \\ \text{ただし, } x_k^L, x_k^R,\ J_k \text{ はすべて定義 2.1 で} \\ \text{用いた記号である} \end{array} \right\}, \text{ if } \theta_0 = 0. \end{cases}$$

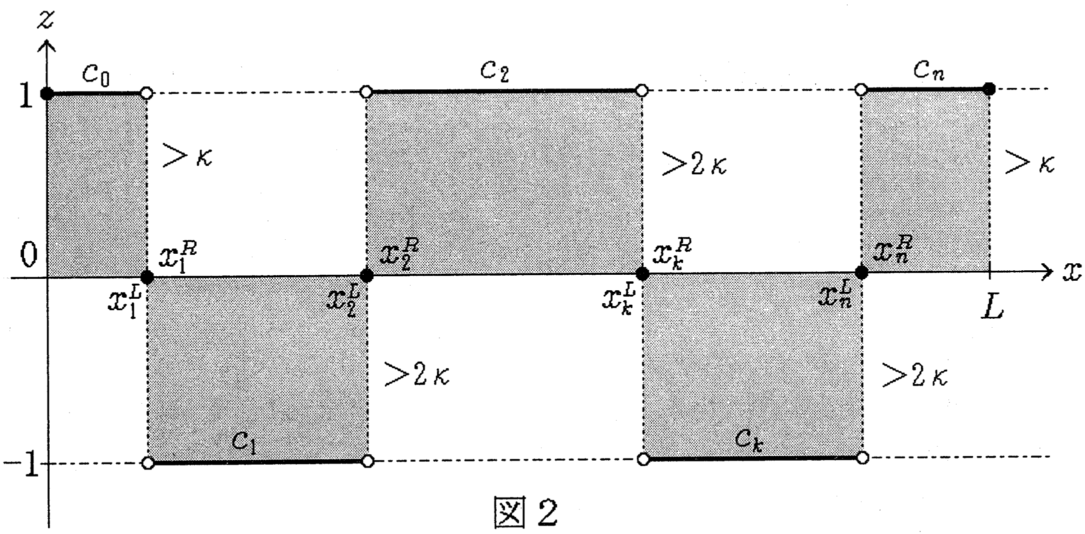

図 2

定理 2.2 （*[7]* 参照）$|\theta_0| < 1$ とする．このとき関数 $w \in L^2(0, L)$ が F_{θ_0} の極小元であるための必要十分条件は，集合 $M_{loc}(\theta_0)$ の中に条件 *(2.2)* を満足するような関数 w° が存在することである．

3 主要な結果の概要

論文 [7] によると，$\theta_0 > 1$ (resp. $\theta_0 < -1$) である場合，定数値関数 $w \equiv 1$ (resp. $w \equiv -1$) のみが定常解になる．よって，必然的に $w \equiv 1$ (resp. $w \equiv -1$) が安定定常解になり，方程式

$$(P)_{\theta_0} \quad v'(t) + \kappa \partial V(v(t)) \ni v(t) + \theta_0 \text{ in } L^2(0, L),\ t > 0,$$

の解 v はすべて $[0, L]$ 上で $w \equiv 1$ (resp. $w \equiv -1$) に一様収束する．また，$|\theta_0| = 1$ の場合の定常解は $w_1 \equiv 1$, $w_2 \equiv -1$ の 2 つで，容易に示されるように $\theta_0 = 1$ (resp. $\theta_0 = -1$)

であれば $w_1 \equiv 1$ (resp. $w_2 \equiv -1$) が安定定常解で, $w_2 \equiv -1$ (resp. $w_1 \equiv 1$) は不安定定常解となる.

従って, この節では $|\theta_0| < 1$ として方程式 $(P)_{\theta_0}$ に対する安定性を議論する. そのために先ず $[0, L]$ 内の相対開区間 J と定数 $c \in [-1, 1]$ の組 (J, c) に対する安定性の概念を導入する.

定義 3.1 J は $[0, L]$ 内の相対開区間, $c \in [-1, 1]$ は定数とする.

(i) (安定性) (J, c) が次の条件を満足するとき, (J, c) は安定であるという.
任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, 正数 $\delta_\varepsilon > 0$ と時間 $t_\varepsilon \geq 0$ が存在して

$$|v(0) - c|_{L^\infty(J)} < \delta_\varepsilon,\ t \geq t_\varepsilon \text{ ならば } |v(t) - c|_{L^\infty(J)} < \varepsilon$$

となる. ここに, v は $(P)_{\theta_0}$ の解である.

(ii) (不安定性) (J, c) が安定でないとき, (J, c) は不安定であるという. 即ちそれは次の条件と同値になる.
ある正数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の正数 $\delta > 0$ と時間 $T \geq 0$ に対し,

$$|v_{\delta,T}(0) - c|_{L^\infty(J)} < \delta,\ |v_{\delta,T}(t_{\delta,T}) - c|_{L^\infty(J)} \geq \varepsilon_0$$

となる様な時間 $t_{\delta,T} \geq T$ と $(P)_{\theta_0}$ の解 $v_{\delta,T}$ が存在する.

1 番目の定理では (J, c) が安定であるための必要十分条件を議論する.

定理 3.1 $|\theta_0| < 1$ とする. $c \in [-1, 1]$ は定数, J は $[0, L]$ 内の相対開区間で

$$J = [0, L] \ or \ [0, b) \ or \ (a, L] \ or \ (a, b) \ (\text{ただし } \kappa \leq a < L,\ 0 < b \leq L - \kappa) \tag{3.1}$$

であるとする. このとき, (J, c) が安定であるための必要十分条件は

$$|c| = 1 \text{ 及び, } |c + \theta_0||J| > \begin{cases} \kappa, & if\ \overline{J} \cap \{0, L\} \neq \emptyset, \\ 2\kappa, & if\ \overline{J} \cap \{0, L\} = \emptyset, \end{cases} \tag{3.2}$$

が成立する事である.

系 3.1 $|\theta_0| < 1$ とする. v は $(P)_{\theta_0}$ の解で, v_∞ は v の ω-極限点とする. *(3.1)* を満たす様な相対開区間 J と定数 $c \in [-1, 1]$ の組 (J, c) が安定で, かつ $v_\infty \equiv c \ on \ J$ であれば, 任意のコンパクトな区間 $J_1 \subset J$ に対し, 有限な時間 $t_1 \geq 0$ が存在して

$$v(t, \cdot) \equiv c \ on \ J \ \forall t \geq t_1$$

となる.

次に, 定理 3.1 の結果を本質的に使って, $(P)_{\theta_0}$ の定常問題

$$(P_\infty) \quad \kappa\partial V(w) \ni w + \theta_0 \text{ in } L^2(0,L)$$

の解の安定性を議論する.

任意の $(P_\infty)_{\theta_0}$ の解 w と（十分小さい）正数 $\mu > 0$ に対し, $[0,L]$ 内の相対開集合 $J_\mu(w)$ を次で与える.

$$J_\mu(w) := \left\{ x \in [0,L] \,\middle|\, \text{任意の } w \text{ の不連続点 } y \text{ に対し, } |x-y| > \mu \right\}.$$

定義 3.2 w は $(P_\infty)_{\theta_0}$ の解, $S_n(\theta_0)$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, x_k^L, x_k^R, J_k, c_k, w° はすべて定義 2.1 で用いた記号とする. この時:

(i) （安定性）定常解 w が次の条件を満足するとき, w は安定であるという.

- $w^\circ \in S_0(\theta_0)$ ならば $w \equiv 1$ または $w \equiv -1$ on $[0,L]$,
- $w^\circ \in S_n(\theta_0)$ $(n \in \mathbb{N})$ ならば, 各番号 $k \in \{0,1,\cdots,n\}$ に対し $x_k^L = x_k^R$ で, (J_k, c_k) は安定である.

(ii) （不安定性）定常解 w が次の条件を満足するとき, w は不安定であるという.

- $w^\circ \in S_0(\theta_0)$ ならば $w \equiv -\theta_0$ on $[0,L]$,
- $w^\circ \in S_n(\theta_0)$ $(n \in \mathbb{N})$ ならば, $x_{k_0}^L < x_{k_0}^R$ 又は (J_{k_0}, c_{k_0}) が不安定となる様な番号 $k_0 \in \{0,1,\cdots,n\}$ が存在する.

2 番目の定理では定常解が安定であるための必要十分条件について議論する.

定理 3.2 $|\theta_0| < 1$ とする. $(P_\infty)_{\theta_0}$ の解 w が安定であることと次の条件は必要十分である.

十分小さい正数 $\mu_0 > 0$ が存在し, 任意の $\mu \in (0,\mu_0)$ と正数 $\varepsilon > 0$ に対し,

$$|v(0) - w|_{L^\infty(J_\mu(w))} < \delta_{\mu,\varepsilon}, \ t \geq t_{\mu,\varepsilon} \text{ ならば } |v(t) - w|_{L^\infty(J_\mu(w))} < \varepsilon$$

となる様な正数 $\delta_{\mu,\varepsilon}$ と時間 $t_{\mu,\varepsilon}$ が存在する. ここに v は $(P)_{\theta_0}$ の解である.

3 番目の定理では $(P)_{\theta_0}$ の解の安定定常解の周辺での挙動を考察する.

定理 3.3 $|\theta_0| < 1$, w は安定定常解とする. この時, 正数 $\mu > 0$ と $\delta > 0$ を十分小さく取れば, 初期条件 $|v(0) - w|_{L^\infty(J_\mu(w))} < \delta$ を満たす様な $(P)_{\theta_0}$ の解 v はすべてある定常解 v_∞ に $L^2(0,L)$ の位相で収束する. 更に, $v(t)$ は v_∞ の不連続点を含まない任意のコンパクト集合上で一様収束している.

すべての $(P)_{\theta_0}$ の解がある定常解に（$L^2(0,L)$ の位相で）収束しているかどうかは依然としてわからないが, 定理 3.3 によって安定定常解から十分に近いところから出発した解はすべて収束することが示された. この結果は解の収束性に関する部分的な解答を与えている.

上記の結果については次節以降で証明を与える.

4　定理 3.1 の証明

この節では定理 3.1 の証明を与える.

[十分性の証明]

先ず十分性を証明する. (J,c) は条件 (3.2) を満たしているとしよう. この時, 他の場合も証明は同様であるので, $c=1$, $\overline{J}\cap\{0,L\}=\emptyset$ としよう.

今, 正数 δ_0 を

$$\delta_0 := \frac{1}{2|J|}(|1+\theta_0||J|-2\kappa) \tag{4.1}$$

で与え, 関数 $v_J:[0,1]\longrightarrow L^2(0,L)$（図 3 参照）を

$$v_J(t,x) := \begin{cases} 1+\delta_0(t-1), \text{ if } x\in J, \\ \\ -1, \text{ otherwise}, \end{cases} \qquad \forall t\in[0,1]$$

で定義する.

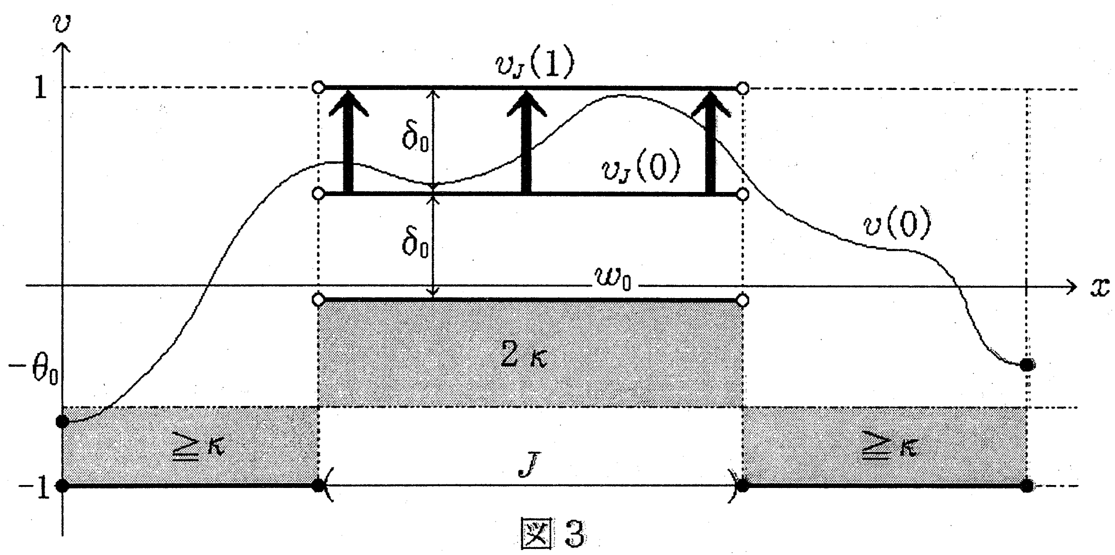

図 3

この時, 関数 v_J は次の発展方程式の解になる.

$$v_J'(t)+\kappa\partial V(v_J(t)) \ni v_J(t)+\theta_0-\delta_0 t\chi_J \text{ in } L^2(0,L),\ t\in[0,1], \tag{4.2}$$

ここに, χ_J は J の特性関数である. 実際, v_J は条件 (S1) を明らかに満たしている. また, (S2) についても, v_J は $[0,L]$ 上の関数

$$w_0(x) := \begin{cases} 1-2\delta_0 \text{ for } x\in J, \\ \\ -1, \text{ otherwise} \end{cases}$$

によって

$$v_J(t) = w_0+\delta_0(t+1)\chi_J \text{ in } L^2(0,L) \tag{4.3}$$

と書くことができ, 更に w_0 は定常解（図 3 参照）であるので次の変分不等式を満たす.

$$\kappa V(w_0) - \int_0^L (w_0+\theta_0)w_0\ dx \le \kappa V(z) - \int_0^L (w_0+\theta_0)z\ dx,\ \forall z \in D(V).$$

よって, (4.1) と (4.3) から

$$\begin{aligned}
&\kappa V(v_J(t)) - \int_0^L (w_0+\theta_0)v_J(t)\ dx \\
= \ & (\kappa V(w_0) + 2\kappa\delta_0(t+1)) - \left(\int_0^L (w_0+\theta_0)w_0\ dx + \delta_0(t+1)((1+\theta_0)-2\delta_0)|J|\right) \\
= \ & \kappa V(w_0) - \int_0^L (w_0+\theta_0)w_0\ dx \\
\le \ & \kappa V(z) - \int_0^L (w_0+\theta_0)z\ dx,\ \forall t \in [0,1],\ \forall z \in D(V).
\end{aligned}$$

この変分不等式を劣微分作用素方程式に書き直すと,

$$\kappa\partial V(v_J(t)) \ni w_0+\theta_0 \text{ in } L^2(0,L),\ \forall t \in [0,1]$$

となる. この方程式に (4.3) と $v_J'(t) = \delta_0\chi_J$ を代入すれば方程式 (4.2) が直ちに得られる.
今, v は $(P)_{\theta_0}$ の任意の解で

$$|v(0)-1|_{L^\infty(J)} < \delta_0$$

を満たすとすると,

$$v_J(0) \le v(0) \text{ a.e. on } [0,L],\ \theta_0 - \delta_0 t\chi_J \le \theta_0,\ \forall (t,x) \in [0,+\infty)\times[0,L]$$

であるので, 系 1.1 から次の不等式が成立する.

$$v_J(1,x) \le v(1,x),\ \text{a.e. } x \in [0,L].$$

次に仮定 (3.1) から $v_J(1)$ は定常解であるので, 系 1.1 を再び用いれば

$$v_J(1,x) \le v(t,x),\ \forall t \ge 1,\ \text{a.e. } x \in [0,L],$$

即ち

$$v(t,x) = 1,\ \forall t \ge 1,\ \text{a.e. } t \in J.$$

を得る. よって (J,c) は安定である. 実際, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta_\varepsilon := \delta_0$, $t_\varepsilon = 1$ とすれば

$$|v(0)-1|_{L^\infty(J)} < \delta_0,\ t \ge 1 \text{ ならば } |v(t)-1|_{L^\infty(J)} = 0 < \varepsilon$$

が成立している.

[必要性]

次に必要性を証明する. 対偶を証明すれば良いので, (J,c) が (3.2) を満たさないと仮定しよう. 即ち $|c|<1$ 又は

$$|c+\theta_0||J| \leq \begin{cases} \kappa, \text{ if } \overline{J}\cap\{0,L\}\neq\emptyset, \\ 2\kappa, \text{ if } \overline{J}\cap\{0,L\}=\emptyset \end{cases} \tag{4.4}$$

ならば, (J,c) は不安定となる事を示す. (J,c) の不安定性は次の 2 つの場合にわけて証明される.

(場合 壱) $|c|<1$ である場合.

証明はほとんど同じなので $-\theta_0 \leq c < 1$ として証明する. 任意の（十分小さな）正数 $\delta>0$ に対し

$$T_\delta := \frac{1-c}{\delta} - 1$$

として, 関数 $v_\delta : [0,T_\delta] \longrightarrow L^2(0,L)$（図 4 参照）を

$$v_\delta(t) := c+\delta(t+1) \text{ on } [0,L], \forall t\in[0,T_\delta]$$

で定義しよう.

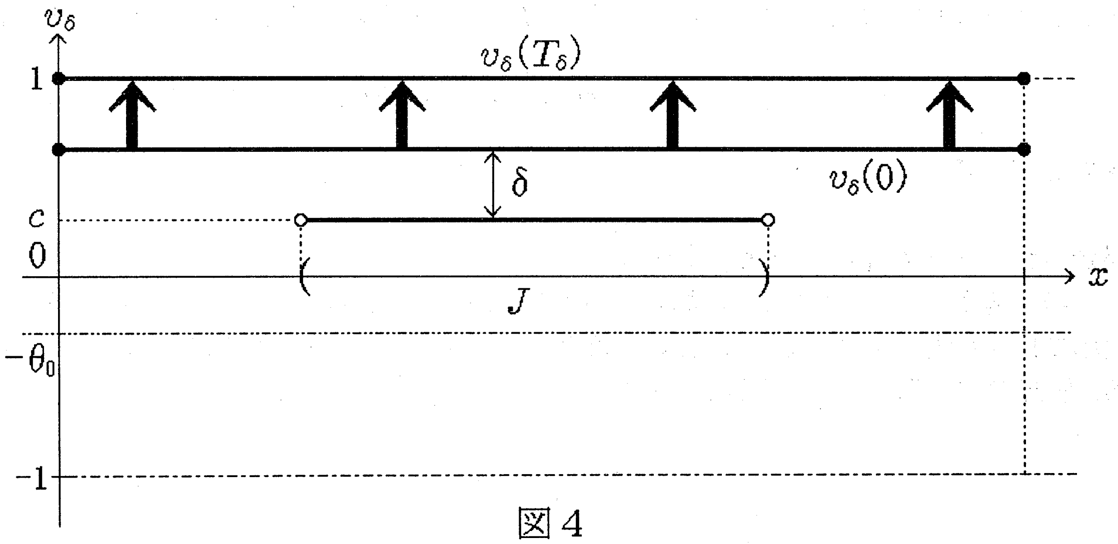

図 4

この時, v_δ は次の発展方程式の解になる.

$$v_\delta'(t)+\kappa\partial V(v_\delta(t)) \ni v_\delta(t)-c-\delta t \text{ in } L^2(0,L), \forall t\in[0,T_\delta]. \tag{4.5}$$

実際, (S1) は明らかに成立し, (S2) についても, 各 $t\in[0,T_\delta]$ に対して

$$\kappa\partial V(v_\delta(t)) \ni v_\delta(t)-c-\delta(t+1), \ v_\delta'(t)=\delta \text{ in } L^2(0,L)$$

となるので, この関係式から直ちに (4.5) を導くことが出来る.
今, v を初期値問題

$$\begin{cases} v'(t) + \kappa\partial V(v(t)) \ni v(t) + \theta_0 \text{ in } L^2(0,L),\ t > 0, \\ v(0) = v_\delta(0) \text{ in } L^2(0,L) \end{cases} \tag{4.6}$$

の解とすると, 仮定から

$$-c - \delta t \le -c \le \theta_0,\ \forall t \in [0, T_\delta]$$

であるので系 1.1 が使えて

$$v_\delta(T_\delta, x) \le v(T_\delta, x),\ \text{a.e. } x \in [0, L]$$

となる. 更に $v_\delta(T_\delta)$ $(\equiv 1)$ は定常解なので, 再び系 1.1 を用いると

$$v_\delta(T_\delta, x) \le v(t, x),\ \forall t \ge T_\delta,\ \text{a.e. } x \in [0, L],$$

即ち

$$v(t, x) = 1,\ \forall t \ge T_\delta,\ \text{a.e. } x \in J$$

を得る. よって (J, c) は不安定である. 実際, $\varepsilon_0 := 1 - c$ として, 任意の（十分小さな）正数 $\delta > 0$ と時間 $T \ge 0$ に対し, $t_{\delta,T} := T_\delta + T$, $v_{\delta,T}$ を初期値問題 (4.6) の解とすれば

$$|v_{\delta,T}(0) - c|_{L^\infty(J)} < 2\delta,\ |v_{\delta,T}(T_\delta + T) - c|_{L^\infty(J)} = 1 - c = \varepsilon_0$$

が成立している.

（場合 弐） (J, c) が (4.4) を満たす場合.

（場合 壱）に当てはまらない場合のみを検証すれば良いので $|c| = 1$ として良い. また, 例によって他の場合の証明は全く同様であるので, $c = 1$, $\overline{J} \cap \{0, L\} \neq \emptyset$ として証明する. 任意の（十分小さな）正数 $\delta > 0$ に対して

$$\tilde{T}_\delta := \frac{2}{\delta} - 1,$$

として, 関数 $\tilde{v}_\delta : [0, \tilde{T}_\delta] \longrightarrow L^2(0, L)$（図 5 参照）を

$$\tilde{v}_\delta(t, x) := \begin{cases} 1 - \delta(t+1) \text{ for } x \in J, \\ -1,\ \text{otherwise}, \end{cases} \quad \forall t \in [0, \tilde{T}_\delta]$$

で定義しよう.

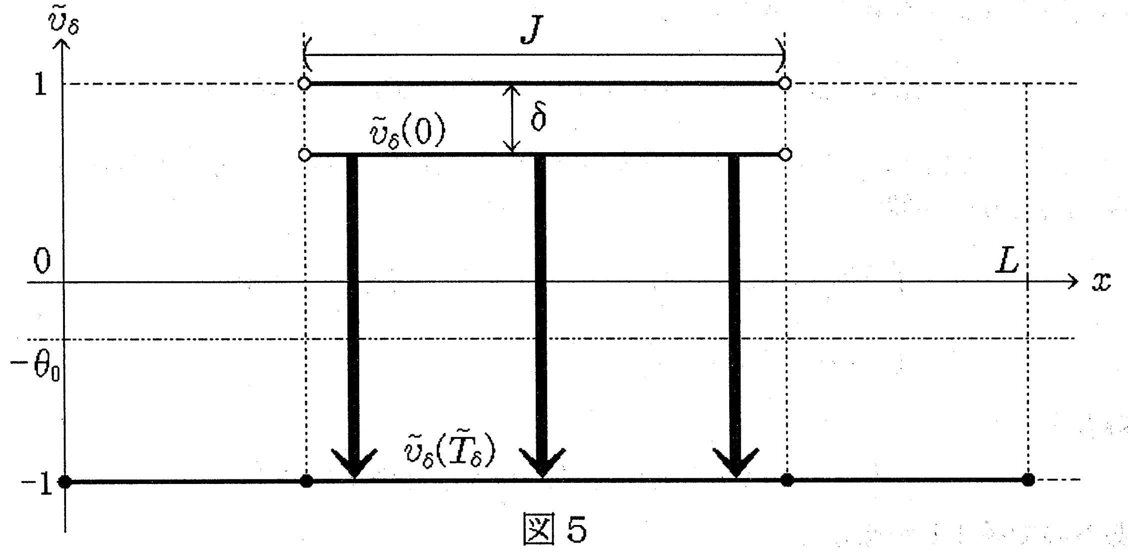

図 5

この時, $\tilde{v}_\delta$ は次の発展方程式の解になる.

$$\tilde{v}_\delta'(t) + \kappa\partial V(\tilde{v}_\delta(t)) \ni \tilde{v}_\delta(t) + \theta_0 + (\delta t + \tilde{\delta}_0)\chi_J \text{ in } L^2(0,L),\ \forall t \in [0,\tilde{T}_\delta], \tag{4.7}$$

ここに,

$$\tilde{\delta}_0 := \frac{1}{|J|}(2\kappa - |1+\theta_0||J|)\ (\geq 0). \tag{4.8}$$

実際, $\tilde{v}_\delta$ は条件 (S1) を明らかに満たしている. また条件 (S2) についても, $\tilde{v}_\delta$ は $[0,L]$ 上の関数

$$\tilde{w}_0(x) := \begin{cases} 1 \text{ for } x \in J, \\ -1, \text{ otherwise} \end{cases}$$

によって

$$\tilde{v}_\delta(t) = \tilde{w}_0 - \delta(t+1)\chi_J \text{ in } L^2(0,L) \tag{4.9}$$

と書かれ, 更に [7, section 3] と同様の手法により $\tilde{w}_0$ は次の変分不等式を満たすことがわかる.

$$\kappa V(\tilde{w}_0) - \int_0^L (\tilde{w}_0 + \theta_0 + \tilde{\delta}_0\chi_J)\tilde{w}_0\,dx \leq \kappa V(z) - \int_0^L (\tilde{w}_0 + \theta_0 + \tilde{\delta}_0\chi_J)z\,dx,\ \forall z \in D(V). \tag{4.10}$$

(4.8) と (4.10) から

$$\begin{aligned} &\kappa V(\tilde{v}_\delta(t)) - \int_0^L (\tilde{w}_0 + \theta_0 + \tilde{\delta}_0\chi_J)\tilde{v}_\delta(t)\,dx \\ = &\ (\kappa V(\tilde{w}_0) - 2\kappa\delta(t+1)) - \left(\int_0^L (\tilde{w}_0 + \theta_0 + \tilde{\delta}_0\chi_J)\tilde{w}_0\,dx - \delta(t+1)(1+\theta_0+\tilde{\delta}_0)|J|\right) \\ = &\ \kappa V(\tilde{w}_0) - \int_0^L (\tilde{w}_0 + \theta_0 + \tilde{\delta}_0\chi_J)\tilde{w}_0\,dx \\ \leq &\ \kappa V(z) - \int_0^L (\tilde{w}_0 + \theta_0 + \tilde{\delta}_0\chi_J)z\,dx,\ \forall t \in [0,\tilde{T}_\delta],\ \forall z \in D(V). \end{aligned}$$

この変分不等式を劣微分作用素方程式で書き直すと,

$$\kappa\partial V(\tilde{v}_\delta(t)) \ni \tilde{w}_0 + \theta_0 + \tilde{\delta}_0\chi_J \text{ in } L^2(0,L),\ \forall t \in [0,\tilde{T}_\delta]$$

となる. この方程式に (4.9) と $\tilde{v}'_\delta(t) = \delta\chi_J$ を代入すれば (4.7) が直ちに得られる.

今, v を初期値問題

$$\begin{cases} v'(t) + \kappa\partial V(v(t)) \ni v(t) + \theta_0 \text{ in } L^2(0,L),\ t > 0, \\ v(0) = \tilde{v}_\delta(0) \text{ in } L^2(0,L) \end{cases} \tag{4.11}$$

の解とすると,

$$\theta_0 \le \theta_0 + (\delta t + \tilde{\delta}_0)\chi_J,\ \forall(t,x) \in [0,+\infty) \times [0,L]$$

であるので系 1.1 が使えて,

$$v(\tilde{T}_\delta, x) \le \tilde{v}_\delta(\tilde{T}_\delta, x),\ \text{a.e. } x \in [0,L]$$

となる.

次に, $\tilde{v}_\delta(\tilde{T}_\delta)$ $(\equiv -1)$ は定常解なので, 系 1.1 を再び用いると

$$v(t,x) \le \tilde{v}_\delta(\tilde{T}_\delta, x),\ \forall t \ge \tilde{T}_\delta,\ \text{a.e. } x \in [0,L],$$

即ち

$$v(t,x) = -1,\ \forall t \ge \tilde{T}_\delta,\ \text{a.e. } x \in J$$

を得る. よって (J,c) は不安定である. 実際, $\varepsilon_0 := 2$ として, 任意の（十分小さな）正数 $\delta > 0$ と時間 $T \ge 0$ に対し, $t_{\delta,T} := \tilde{T}_\delta + T$, $v_{\delta,T}$ を初期値問題 (4.11) の解とすれば,

$$|v_{\delta,T}(0) - 1|_{L^\infty(J)} < 2\delta,\ |v_{\delta,T}(\tilde{T}_\delta + T) - 1|_{L^\infty(J)} = 2 = \varepsilon_0$$

が成立している.

よって必要性, 十分性共に証明されたので, 定理の主張は正しい. ■

5 その他の結果の証明

系 3.1 を証明するにあたり, 有界変分関数のコンパクトな区間上での基本的な性質を紹介する.

補題 5.1 I を $\mathbb{R}$ 内のコンパクトな区間とし, $\{z_i\}$ を次を満たすような有界変分関数の列とする.

$$z_i \to c\ (\text{定数})\ \mathit{in}\ L^2(I),\ V_0(z_i; I) \to 0\ \mathit{as}\ i \to +\infty,$$

ここに, $V_0(z_i; I)$ は z_i の区間 I 上での全変分である. この時, z_i は I 上で定数 c に一様収束する.

系 3.1 の証明: v, v_∞, c, J はすべて系 3.1 と同じ記号とする. 仮定から,

$$|c| = 1,\ J = [0, L] \text{ or } [0, a) \text{ or } (b, L] \text{ or } (a, b) \text{ with } \kappa \le a < L,\ 0 < b \le L - \kappa$$

であるが, いずれの場合も証明は全く同様であるため, $c = 1$, $J = (a, b)$ の場合のみを証明する.

定理 3.1 から, 任意のコンパクトな区間 $J_1 \subset J$ に対し, 正数 $\mu > 0$ を十分小さく取れば

$$J_1 \subset (a + \mu, b - \mu) =: J_\mu,$$

$(J_\mu, 1)$ は安定となるように出来る. 今, 時間の列 $\{t_i\} \subset \mathbb{R}$ を

$$t_i \nearrow +\infty,\ v(t_i) \to v_\infty \text{ in } L^2(0, L) \text{ as } i \to +\infty$$

となるように取ると, 命題 1.2 から

$$V_0(v(t_i, \cdot)) \to V_0(v_\infty) \text{ as } i \to +\infty$$

を得る. ここで $I := \overline{J_\mu}$, $z_i := v(t_i)|_I$ と置けば, $v_\infty \equiv 1$ on I より

$$z_i \to 1 \text{ in } L^2(I),\ V_0(z_i; I) \to 0 \text{ as } t \to +\infty.$$

従って補題 5.1 から, $z_i = v(t_i)|_I$ は $I = \overline{J_\mu}$ 上で定数 1 に一様収束する. $(J_\mu, 1)$ が安定であることと併せると,

$$v(t) \to 1\ (\overline{J_\mu} \text{ 上一様}) \text{ as } t \to +\infty$$

を得る. 更に定理 3.1 の十分性の証明と同様にして $v(t, \cdot)$ は $\overline{J_\mu}$ 上では定数 1 に有限時間 t_1 で到達することも示される. ■

定理 3.2 の証明: w が定数であれば, 定理 3.2 の証明は定理 3.1 の証明と全く同じになるので, w は定数でないとする. 即ち $w^\circ \in S_n(\theta_0)$ $(n \in \mathbb{N})$ と仮定する. ここに w° は定理 2.1 で用いた記号である.

先ず必要性を示す. 定理 3.1 から, 正数 $\mu_0 \in (0, \kappa)$ を十分小さく取れば

$$\begin{cases} |c_0 + \theta_0|(|J_0| - \mu_0) > \kappa,\ |c_n + \theta_0|(|J_n| - \mu_0) > \kappa, \\ |c_k + \theta_0|(|J_k| - \mu_0) > 2\kappa,\ k = 1, \cdots, n-1 \end{cases} \tag{5.1}$$

となるように出来る. ここに, c_k, $x_k^L = x_k^R$, J_k はすべて定常解 w° の構造に対して定義 2.1 の (II) で用いた記号である. 任意の $\mu \in (0, \mu_0]$ に対し,

$$J_{k,\mu} := \begin{cases} [0, x_1^R - \mu),\ k = 0, \\ (x_k^R + \mu, x_{k+1}^R - \mu),\ k = 1, \cdots, n-1, \\ (x_n^R + \mu, L],\ k = n \end{cases} \tag{5.2}$$

と置くと, 再び定理 3.1 から $(J_{k,\mu}, c_k)$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ はすべて安定になる. 従って任意の $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $\mu \in (0, \mu_0]$, $\varepsilon > 0$ に対し,

$$|v(0) - c_k|_{L^\infty(J_{k,\mu})} < \delta_{k,\mu,\varepsilon},\ t \geq t_{k,\mu,\varepsilon} \text{ ならば } |v(t) - c_k|_{L^\infty(J_{k,\mu})} < \varepsilon \tag{5.3}$$

となるような正数 $\delta_{k,\mu,\varepsilon} > 0$ と時間 $t_{k,\mu,\varepsilon} \geq 0$ が存在する. ここに, v は $(P)_{\theta_0}$ の解である. 今, $J_\mu(w) = \sum_{k=0}^{n} J_{k,\mu}$ であるので,

$$\delta_{\mu,\varepsilon} := \min_{0 \leq k \leq n} \delta_{k,\mu,\varepsilon},\ t_{\mu,\varepsilon} := \max_{0 \leq k \leq n} t_{k,\mu,\varepsilon}$$

と置けば, (5.3) から容易に確認できる様に, この $\delta_{\mu,\varepsilon}$, $t_{\mu,\varepsilon}$ は示すべき条件を満たしている.

十分性のほうは定理 3.1 の必要性の証明と全く同様である. ■

定理 3.3 の証明: w が定数であるときは系 3.1 から自明なので, w は定数でないとする. 即ち, $w^\circ \in S_n(\theta_0)$ $(n \in \mathbb{N})$ とする, ここに w° は定理 2.1 と同じ記号である. また, 定常解 w° の構造に関して c_k, $x_k^L = x_k^R$, J_k $(k = 0, 1, \cdots, n)$ はすべて定義 2.1 と同じ記号であるとし, $\mu_0 \in (0, \kappa)$ は (5.1) を満たすような正数, 各 $\mu \in (0, \mu_0]$, $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ に対し, $J_{k,\mu}$ は (5.2) で定義される $[0, L]$ 内の相対開区間とする.

今, 任意の $\mu \in (0, \min\{\mu_0, \kappa\})$ に対し, 正数 ε を

$$\begin{cases} |c_0 \pm \varepsilon + \theta_0|(|J_0| - \mu_0) > \kappa,\ |c_n \pm \varepsilon + \theta_0|(|J_n| - \mu_0) > \kappa, \\ |(c_k \pm \varepsilon + \theta_0)|(|J_k| - \mu_0) > 2\kappa,\ k = 1, \cdots, n-1; \end{cases} \tag{5.4}$$

となるように十分小さく取ろう, 無論 $c_k = 1$ 又は $c_k = -1$, $k = 0, 1, \cdots, n$ である. 定理 3.2 から, この様な ε, μ に対し, 正数 $\delta_{\mu,\varepsilon} > 0$ と時間 $t_{\mu,\varepsilon} \geq 0$ を

$$|v(0) - w|_{L^\infty(J_\mu(w))} < \delta_{\mu,\varepsilon},\ t \geq t_{\mu,\varepsilon} \text{ ならば } |v(t) - w|_{L^\infty(J_\mu(w))} < \varepsilon$$

となるように取る事が出来る, ここに v は $(P)_{\theta_0}$ の解である.

ここで, 初期条件

$$|v(0) - w|_{L^\infty(J_\mu(w))} < \delta_{\mu,\varepsilon}$$

を満たす様な $(P)_{\theta_0}$ の解 v はすべてある定常解に $L^2(0, L)$ の位相で収束することを示そう. v の ω-極限点 v_∞ を 1 つ取ると, v_∞ は定常解であるので, ε の選び方 ((5.4) 参照) から

$$v_\infty = c_k \text{ on } J_k,\ k = 0, 1, \cdots, n$$

であり, 更に $0 < \mu < \kappa$ であるので, v_∞ は各閉区間 $[x_k^R - \mu, x_k^R + \mu]$ $k = 1, \cdots, n$ 内で高々 2 つの不連続点しか持てないこともわかる. ここで v_∞ の構造を, 記号 c_k^∞, $x_k^{L,\infty}, x_k^{R,\infty}$, J_k^∞, $k = 0, 1, \cdots, n^\infty$ によって定義 2.1 の (II) と同様に表現すると直ちに次が得られる.

$$n^\infty = n,\ c_k = c_k^\infty,\ J_{k,\mu} \subset J_k^\infty,\ k = 0, 1, \cdots, n,$$

$$x_k^R - \mu \le x_k^{R,\infty} \le x_k^{L,\infty} \le x_k^R + \mu,\ k = 1, \cdots, n,$$

各 $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ に対し, (J_k^∞, c_k^∞) は安定. よって, 系 3.1 と Lebesgue の優収束定理から

$$v(t) \to v_\infty \text{ in } L^2\left(\sum_{k=0}^{n} J_k^\infty\right) \text{ as } t \to +\infty$$

となる. この事は v の任意の ω-極限点に対して成立する. よって各区間 J_k^∞ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ は ω-極限点の選び方に無関係に決まる事がわかる. 即ち v の ω-極限点は一点 v_∞ のみで, $v(t)$ は v_∞ に $L^2(0, L)$ の位相で収束する.

更に, 系 3.1 と補題 5.1 を直接用いれば, $v(t)$ は v_∞ の不連続点を含まない任意のコンパクト集合上で v_∞ に一様収束することも示される. ■

参考文献

[1] X. Chen and C. M. Elliott, Asymptotics for a parabolic double obstacle problem, Royal Soc. London, Proc. Math. Phys. Sci. Ser. **A444** (1994), 429-445.

[2] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions,* Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Inc., Boca Raton, 1992.

[3] A. Ito, Asymptotic stability of Allen-Cahn model for nonlinear Laplacian with constraints, Adv. Math. Sci. Appl., Gakkōtosho, Tokyo, Vol. 9, No. 1 (1999), pp. 137-161.

[4] A. Ito, N. Yamazaki and N. Kenmochi, Attractors of nonlinear evolution systems generated by time-dependent subdifferentials in Hilbert spaces, pp. 327-350, in *Dynamical Systems and Differential Equations Vol. I*, ed. W. Chen and S. Hu, Southwest Missouri State Univ., Springfield, 1998.

[5] N. Kenmochi, Systems of nonlinear PDEs arising from dynamical phase transitions, Lecture Notes Math., Springer, Vol. 1584, Berlin, 1994.

[6] N. Kenmochi, Y. Mizuta and T. Nagai, Bull. Fac. Edu., Chiba Univ., **29** (1980), 11-22.

[7] N. Kenmochi and K. Shirakawa, A variational inequality for total variation functional with constraint, to appear Nonlinear Analysis.

[8] A. Visintin, *Models of Phase Transitions,* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **Vol. 28**, Birkhäuser, Boston, 1996.